### 4.1 Математическое моделирование атмосферных процессов

В результате работы промышленных предприятий в окружающую среду выбрасываются газообразные и конденсированные продукты, например оксиды углерода, азота и серы, альдегиды, свинец и др. Кроме того, в приземном слое в процессе фотохимических реакций образуются озон и другие, опасные для здоровья человека и состояния растительного и животного мира токсиканты. При определенных метеорологических условиях даже незначительные транспортные потоки могут создавать неблагополучную экологическую обстановку в населенных пунктах. Для проектирования и строительства промышленных предприятий необходимо проводить оценку загрязнения окружающей среды с учетом вышеуказанных факторов, а также рельефа местности, характера застройки и наличия лесных массивов. Необходимо также учитывать результирующее воздействие загрязнения окружающей среды от промышленных предприятий и иных источников, например промышленных предприятий. В результате анализа существующих моделей загрязнения окружающей среды от промышленных предприятий. Для моделирования таких процессов построена математическая модель. Эта модель приближена к реальности, которая учитывает направление и скорость ветра, температура окружающей среды и связанное с этим движение нагретых продуктов выбросов от промышленных предприятий.


Рис. 4.1 Разные примеры загрязнения атмосферы

1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -g\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x}(k_1\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_2\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_3\frac{\partial u}{\partial z})$$

2) $$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -g\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x}(k_1\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_2\frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_3\frac{\partial v}{\partial z})$$

3) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

4) $$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(k_1\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_2\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_3\frac{\partial T}{\partial z})$$

5) $$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(k_1\frac{\partial S}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_2\frac{\partial S}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_3\frac{\partial S}{\partial z})$$

6) $\rho = \rho_0(1 - \beta T + \alpha S)$

Для этой системы уравнений ставим такие граничные условия:

Условия на стенках: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

Условие на поверхности земли: $k_3\frac{\partial u}{\partial z} = -C|u|u$

$$k_3 \frac{\partial v}{\partial z} = -C|v|v$$

Условие на высоте: $z = h$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

Кинематическое условие: $\frac{\partial H}{\partial t} = w$

В этой системе первое уравнения описывает скорость ветра с востока на запад или запада на восток. Второе - описание скорости ветра с юга на север или севера на юг. Третье - это уравнения неразрывности. Четвертое уравнение необходимо для изменения температуры окружающей среды. Пятое - для концентрации (загрязняющее вещество), а шестое уравнение - изменения плотности.

Здесь u, v и w компоненты скорости, $g$ - ускорение свободного падения, $H$ - геострофическое давление, $\rho_0$ - начальная плотность окружающей среды, $k_1, k_2, k_3$ - коэффициенты диффузии, $h$ - высота, $\beta$ - коэффициент расширение и сжимаемости, $\alpha$ - коэффициент насыщенности, $T$ - температура, $S$ - концентрация.

**Численный алгоритм для решения системы уравнений:**

1) Уравнение (4) решаем с помощью методом дробных шагов, который был подробно описан в главах 3.1 и 3.7.

2) Решение уравнение (5) находится аналогично первому пункту, методом дробных шагов.

3) Найденную температуру (T) и концентрацию (S) подставляем в уравнение (6) и находим плотность $\rho$.

4) Далее найденную плотность ($\rho$) подставляем в уравнения (1) и (2) и снова применяем метод дробных шагов. Ввиду того, что количество неизвестных больше, чем количество уравнений, решение не очевидно. Поэтому необходимо применить метод расщепления по физическим параметрам. Для этого при решении (1) и (2) уравнений методом дробных шагов не учитываем давление (P). Давайте напишем алгоритм для первого уравнения. С помощью метода дробных шагов находим $u^{n+1/3}$ и $u^{n+2/3}$, а для третьего шага $u^{n+1}$ добавляем давление (P), которое не было учтено до этого

$$A_i u^{n+1}{}_{i+1} + B_i u^{n+1}{}_i + C_i u^{n+1}{}_{i-1} = \\ = D_i - g\frac{\partial H}{\partial x} \qquad i = 1, N-1 \tag{1}$$

Решение будем искать в $u^{n+1}{}_i = \alpha_i + \beta_i \frac{\partial H}{\partial x}$ виде. (2)

Теперь подставим (2) в (1) и получим

$$A_i(\alpha_{i+1} + \beta_{i+1}\frac{\partial H}{\partial x}) + B_i(\alpha_i + \beta_i \frac{\partial H}{\partial x}) + \\ + C_i(\alpha_{i-1} + \beta_{i-1}\frac{\partial H}{\partial x}) = D_i - g\frac{\partial H}{\partial x}$$

Последнее уравнения разделим на два уравнения

$$A_i\alpha_{i+1} + B_i\alpha_i + C_i\alpha_{i-1} = D_i \\ A_i\beta_{i+1}\frac{\partial H}{\partial x} + B_i\beta_i\frac{\partial H}{\partial x} + C_i\beta_{i-1}\frac{\partial H}{\partial x} = -g\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3}$$

Второе уравнение, относящееся к (3) системе, можно сократить на $\frac{\partial H}{\partial x} \neq 0$, в результате получим

$$A_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_i + C_i \alpha_{i-1} = D_i$$
$$A_i \beta_{i+1} + B_i \beta_i + C_i \beta_{i-1} = -g$$

Отсюда с помощью матричной прогонки можно найти $\alpha_i$ и $\beta_i$.

А для второго уравнения мы используем

$$v^{n+1}{}_i = \gamma_i + \sigma_i \frac{\partial H}{\partial y} \qquad (4)$$

и проделываем такую же операцию как для $u^{n+1}{}_i$.

5) Теперь интегрируя (3) систему уравнений по z получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^h v dz + w = 0$$

Используя кинематическое условие, можно будет переписать последнее уравнения в таком виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^h v dz = 0 \qquad (5)$$

Теперь подставим в (5) уравнения (2) и (4) и получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h (\alpha_i + \beta_i \frac{\partial H}{\partial x}) dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^h (\gamma_i + \sigma_i \frac{\partial H}{\partial y}) dz = 0$$

Так как коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \sigma_i$ не зависят от z , то можно будет записать последнее уравнения в таком виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + S_1 + S_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + S_3 + S_4 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

Последнее уравнения решаем с помощью матричной прогонки

$$\frac{H^{n+1}{}_{ij} - H^{n}{}_{ij}}{\Delta t} + \frac{H^{n+1}{}_{i+1j} - 2H^{n+1}{}_{ij} + H^{n+1}{}_{i-1j}}{\Delta x^2} +$$
$$+ \frac{H^{n+1}{}_{ij+1} - 2H^{n+1}{}_{ij} + H^{n+1}{}_{ij-1}}{\Delta y^2} = -S_{1ij} - S_{3ij}$$

Приводим к векторному виду последнее уравнения и находим все коэффициенты

$$A_i H_{i+1} + B_i H_i + C_i H_{i-1} = D_i$$

$$A_i = \begin{vmatrix} \frac{S_2}{\Delta y^2} & 0 & . & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} \end{vmatrix} \quad C_i = \begin{vmatrix} \frac{S_2}{\Delta y^2} & 0 & . & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} \end{vmatrix}$$

$$B_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta t} - \frac{2S_2}{\Delta x^2} - \frac{2S_4}{\Delta y^2} & \frac{S_4}{\Delta y^2} & . & 0 \\ \frac{S_2}{\Delta y^2} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{2S_2}{\Delta x^2} - \frac{2S_4}{\Delta y^2} & . & 0 \\ . & . & . & \begin{matrix} . \\ \frac{S_4}{\Delta y^2} \end{matrix} \\ 0 & 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2}. & \frac{1}{\Delta t} - \frac{2S_2}{\Delta x^2} - \frac{2S_4}{\Delta y^2} \end{vmatrix}$$

Далее решаем с помощью матричной прогонки